| Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: 1 |
| --- | --- | --- |
| Adres: | Studierichting. | Tentamen: Algebra |
| Postcode en | | Datum: 2 feb. 2004 |
| Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent: |

3

1 voor $\sigma \in A_n$ met orde $\sigma = 28$ geldt dat

$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ en $\text{kgv}(l_1, l_2, \ldots, l_k) = 28$

met $l_i$ de lengte van $\sigma_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, k$ en

$\sigma_i$ disjuncte cykels

neem $\sigma = (1\ 2)(3\ 4 \ldots 30)$, dan is orde $\sigma = \text{kgv}(2, 28) = 28$

en $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\,2)) \cdot \varepsilon((3\ 4 \ldots 30)) = (-1) \cdot (-1)^{28-1} = 1$

dus voor $n = 30$ is er een element met orde 28 in $A_n$

7 $\# S_5 = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24$, $\text{ggd}(5, 24) = 1$

2

$S_5$ bevat Sylow 5-groep, met 5 el.n

het aantal onderling verschillende Sylow 5-groepen

in $S_5$ is 1 mod 5 en ook een deler van 24

$\Rightarrow$ 1 of 6

sowieso moet (1) in de Sylow 5-groep H

en omdat het een ondergroep met 5 elementen is,

moeten de elementen in H orde 1 of 5 hebben,

de elementen $\neq$ (1) hebben dus orde 5

aantal el.n in $S_5$ met orde 5 :

5-cykels : $1 \cdot 4! = 24$

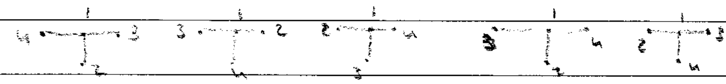
... meer zijn er niet

en elke 5-cykel $\sigma$ brengt een ondergroep met 5 elementen voort,

en $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ brengen allemaal dezelfde voort, dus

$$\# = \frac{24}{4} = 6$$

3



**3** $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$

3

(de elementen van $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ die ggd met 8 gelijk 1 hebben)

$\text{ord}(\bar{1}) = 1$, $\text{ord}(\bar{3}) = 2$, $\text{ord}(\bar{5}) = 2$, $\text{ord}(\bar{7}) = 2$

| | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{7}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ |

$D_5 = \{(1), (25)(34), (13)(45), (24)(15), (35)(12), (14)(23),$
$\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$, waarbij $\rho = (1\,2\,3\,4\,5)$

$\text{ord}((1)) = 1$ $\text{ord}(\sigma) = 2$ voor bovenstaande producten van 2-cykels

$\text{ord}\,\rho^k = 5$ voor $k = 1,2,3,4$

$\varphi_1 : D_5 \longrightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$

$\varphi_1(\sigma) = \bar{1}$, $\bar{1}\cdot\bar{1} = \varphi_1(\sigma_1)\cdot\varphi_1(\sigma_2) = \varphi_1(\sigma) = \bar{1}$

dus $\varphi_1$ homomorfisme

nu $\varphi_2$ nog, we moeten daarvoor ook elementen afbeelden op minstens één element in $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ ongelijk aan het ~~een~~ ~~heidselement~~:

$$\varphi_2 : D_5 \longrightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$$
$$(1) \longmapsto \bar{1}$$
$$\longmapsto \bar{3}$$

we weten dat voor $\sigma = \rho^k$, $k = 1,2,3,4$ dat
$\varphi_2(\sigma^5) = \bar{1} \Rightarrow \varphi_2(\sigma)^5 = \bar{1}$, dus $\varphi_2(\sigma) \neq \bar{3}$
en $\varphi_2(\sigma) \neq \bar{5}$ en $\varphi_2(\sigma) \neq \bar{7}$
($\bar{3}, \bar{5}$ en $\bar{7}$ leveren nl. tot de macht 5 zichzelf, want ze hebben orde 2)

$\Rightarrow$ beeld van $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$ ~~moet~~ moet $\bar{1}$ zijn:

$\{(1), \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\} \subset \text{kern}(\varphi_2)$

stuur nu $(25)(34)$ naar $\bar{3}$

$$\varphi(((25)(34))^2) = \varphi((1)) = \bar{1}$$
$$\overset{\shortparallel}{\varphi(((25)(34))^2} = (\bar{3})^2 = \bar{1}$$

Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: | Naam docent:

(vervolg 3)

want het product van twee producten van 2-cykels uit $D_5$ is altijd $\rho^k$ voor $k \in \{2,3,4\}$ (zie bijv. $(25)(34)(13)(45) = (5\,3\,1\,4\,2) = \rho^3$, anderen gaan ongeveer net zo)

het beeld van zo'n product moet dus $\bar{1}$ zijn

$\varphi_2(\sigma_1)\,\varphi_2(\sigma_2) = \bar{3}\cdot\bar{3} = \bar{1}$

producten van 2-cykels

dus $\varphi_2(\sigma) = \begin{cases} \bar{1} & \text{voor } \sigma \in \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\} \\ \bar{3} & \text{anders} \end{cases}$

5

0

| | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
| -1 | -1 | 1 | -i | i | -j | j | -k | k |
| i | i | -i | 1 | -1 | k | -k | -j | j |
| -i | -i | i | -1 | 1 | -k | k | j | -j |
| j | j | -j | -k | k | 1 | -1 | i | -i |
| -j | -j | j | k | -k | -1 | 1 | -i | i |
| k | k | -k | j | -j | -i | i | 1 | -1 |
| -k | -k | k | -j | j | i | -i | -1 | 1 |

ondergroep $H = \{\pm 1, \pm i\}$ is commutatief, zie tabel: hoek linksboven is symmetrisch

dus $H$ en z'n ondergroep zijn normaaldelers ~~commutatief~~

$G$ is normaaldeler, dus voor $H$ een ondergroep van $G$ geldt dat $G \cap H = H$ normaaldeler is van $GH = G$ ← zo zou elke ondergroep van elke groep normaaldeler zijn, en dat is niet zo.

2

$a_1$ en $b_1$ zitten in $G$ en ook $a_1^{-1}$ en $b_1^{-1}$, dus hebben we in $H$ naast $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ ook $b_1 a_1 (b_1)(a_1^{-1}) \neq (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})^{-1}$ nee

$= b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1$

en ook alle producten van elementen in $H$ zijn in $H$ bevat, $H$ bestaat immers uit alle producten $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$, dus ook met alle combinaties van $a_i$ en $b_i$.

En omdat beide $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ en zijn inverse in $H$ zitten

H en is H ondergroep van G.

(vervolg van 8) $gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = ga(g^{-1}g)b(g^{-1}g)a^{-1}(g^{-1}g)b^{-1}g^{-1}$

$= (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1})$ $\left(\gamma_g(x^{-1}) = \gamma_g(x)^{-1}\right)$ homom.

$= (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1}$

willekeurig element in H:

$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$

geconjugeerd:

$ga_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}g^{-1}$

$=$

$ga_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}g^{-1}\,ga_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_{n-1}b_{n-1}a_{n-1}^{-1}b_{n-1}^{-1}g^{-1}\,ga_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}g^{-1}$

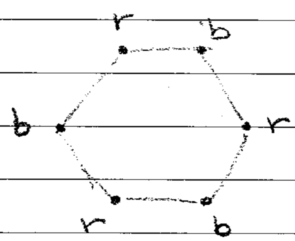
$=$

$\prod_{i=1}^{n} ga_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}g^{-1} = \prod_{i=1}^{n} (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1} \in H$

dus H normaaldeler in G

3

2




$D_6 = \{(1), \rho, \rho^2, \dots, \rho^5, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

$\rho$ rotatie over $\frac{\pi}{3}$ naar rechts

$\tau_i$ spiegeling in lijn door een zijde

$\sigma_i$ spiegeling in lijn door een punt

elk element van $D_6$ stuurt een punt naar een (ander) punt en permuteert dus de kleuren

*je zegt het niet helemaal correct, maar de beschrijving hieronder geeft het goede argument.*

$\varphi : D_6 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \bar{0} & \sigma \in \{(1), \rho^2, \rho^4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \\ \bar{1} & \text{anders} \end{cases}$$

0

6 $gN = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a \\ a & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(gN)^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

?

0

*waarom bestaat een $\varphi$ naar $\mathbb{Z}$?*

9 $\varphi : G \to G'$ homomorf met $\ker(\varphi) = H$,

dan $G/H \cong \varphi(G) \subset G'$

als $G'$ commutatief, dan $\varphi(G)$ en dus ook $G/H$

neem $G' = \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \varphi\left(\prod_{i}^{n} a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}\right) = \prod_{i}^{n} \varphi(a_i)\varphi(b_i)\varphi(a_i)^{-1}\varphi(b_i)^{-1}$